＜特典問題②＞ 整数問題に挑戦！

$$\frac{1}{\ell}+\frac{1}{2m}+\frac{1}{3n}=\frac{4}{3}$$ となる
自然数の組 (ℓ, m, n) をすべて求めよ。
ただし $\ell<m<n$ とする。

(2023 釧路公立大)

(よくやるミス) 通分して考える

$$\frac{6mn+3n\ell+2\ell m}{6\ell mn}=\frac{4}{3}=\frac{8}{6}$$

$$8\ell mn = 6mn + 3n\ell + 2\ell m$$

$$\ell(8mn-3n) = m(6n+2\ell) \quad ?$$

(実験) → 文字が多くてよく分からなくなる。
(どうにかして考える文字を減らしたい)

$\ell=1$ のとき $1<m<n$ より $2\leqq m$ かつ $3\leqq n$

また $\frac{1}{\ell}+\frac{1}{2m}+\frac{1}{3n}$

$=1+\frac{1}{2m}+\frac{1}{3n}$ より

$$\frac{1}{2m}+\frac{1}{3n}=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3} \quad \cdots ①$$

$m=2$ のとき

$\frac{1}{4}+\frac{1}{3n}=\frac{1}{3}$ ∴ $\frac{1}{3n}=\frac{1}{12}$ より $n=4$

$(\ell, m, n) = (1, 2, 4)$

$m=3$ のとき

$\frac{1}{6}+\frac{1}{3n}=\frac{1}{3}$ ∴ $\frac{1}{3n}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$

$n=2$

これは $m<n$ を満たさず不適

$m=4$ のとき …

→ 何の意図や方針もなく進めてしまうと
答えは求まるが"再現性"がない！

Q 考え方　整数問題の3大解法

① 足し算 → 積の形に (因数分解)
② 条件から範囲を絞る
③ 倍数や余りに注目する

☆ $\ell<m<n$ から考えてみる (条件から範囲を絞る)

$(1\leqq)\ \ell<m<n$ の逆数をとると

$\frac{1}{n}<\frac{1}{m}<\frac{1}{\ell}$ となる。

これより

$$\frac{4}{3}=\frac{1}{\ell}+\frac{1}{2m}+\frac{1}{3n}<\frac{1}{\ell}+\frac{1}{2\ell}+\frac{1}{3\ell}=\frac{11}{6\ell}$$

不等式評価

すなわち $\frac{4}{3}<\frac{11}{6\ell} \iff 24\ell<33$

$\iff \ell<\frac{11}{8}=1.3\cdots$

よって $\ell=1$ となる。← 不等式評価で 3文字 ⇒ 2文字に！

$\ell=1$ のとき $(2\leqq m<n)$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2m}+\frac{1}{3n}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{2m}+\frac{1}{3n}=\frac{1}{3} \quad \cdots (☆)$$

＜解法1＞ 不等式で評価する

$\frac{1}{n}<\frac{1}{m}$ より $\frac{1}{3}=\frac{1}{2m}+\frac{1}{3n}<\frac{1}{2m}+\frac{1}{3m}=\frac{5}{6m}$

すなわち $\frac{1}{3}<\frac{5}{6m} \iff 6m<15$

$\iff m<\frac{5}{2}=2.5$

よって $m=2$ となる

このとき $\frac{1}{4}+\frac{1}{3n}=\frac{1}{3} \iff \frac{1}{3n}=\frac{1}{12}$ となり $n=4$

以上より $(\ell, m, n)=(1, 2, 4)$

＜解法2＞ 通分して分数をなくす！

(☆)より $\frac{3n+2m}{6mn}=\frac{2}{6} \iff 2mn=3n+2m$

☆ 2変数 ⇒ "因数分解もどき"が使える

$$2mn=3n+2m$$

$$mn-m-\frac{3}{2}n=0$$

因数分解の形をつくる

$$\left(m-\frac{3}{2}\right)(n-1)-\frac{3}{2}=0$$

$$\left(m-\frac{3}{2}\right)(n-1)=\frac{3}{2}$$

$$(2m-3)(n-1)=3$$

$m\geqq 2$ より $2m-3\geqq 1$
$n\geqq 3$ より $n-1\geqq 2$ より

$(2m-3, n-1)=(1, 3)$

∴ $(m, n)=(2, 4)$

以上より

$(\ell, m, n)=(1, 2, 4)$

☆ 整数を得意にしたい方は "整数問題全17ページ解説" へGO!