<特典問題③> 面白い難問に挑戦!!

$A = \dfrac{10^{40} - 3^{10}}{9997}$, $B = \dfrac{10^{36} - 3^{9}}{9997}$ とする

このとき A, B の最大公約数を求めよ。

(2023 立教大・改)

ヒント

Q1. A, B は整数であるか?

Q2. A の 1 の位の数は?

Q3. A − 3B を素因数分解せよ。

<方針>

A, B の最大公約数を gcd(A, B) とおく

$\gcd(A, B) = \gcd(A - kB, B) = g$

ユークリッドの互除法を考えて

A − kB が計算しやすい k を考えてみる。

$$A - 3B = \frac{10^{40} - 3^{10}}{9997} - \frac{3(10^{36} - 3^9)}{9997}$$

$$= \frac{10^{36} \times (10000 - 3)}{9997}$$

$$= 10^{36}$$

$$= 2^{36} \times 5^{36}$$

よって $\gcd(A, B) = \gcd(2^{36} \times 5^{36}, B) = g$

B と $2^{36} \times 5^{36}$ の最大公約数 g は

2 か 5 を素因数にもつ。 …(☆)

☆ 何のヒントもないと、ここで止まってしまう。

☆ 何のためにヒント(誘導)があるのかを考える。

A, B の最大公約数 g は 2 または 5 を因数にもつ

すなわち $g = 2^a \cdot 5^b$ と表せる ($0 \leqq a$, $0 \leqq b$)

A, B は g の倍数なので A, B も $2^a \cdot 5^b$ を因数にもつ

Q2

ここで A の 1 の位が 3 となるので

A は 2 の倍数でも、5 の倍数でもない。

よって $g = 2^a \cdot 5^b$ は $a = b = 0$ で $g = 1$

以上より A と B の最大公約数は 1

Q1

$$A = \frac{10^{40} - 3^{10}}{9997} = \frac{10^{40} - 3^{10}}{10^4 - 3}$$

9997 = 10000 − 3

シンプルな形に!

$10^4 = a$, $3 = b$ とすると

$$\frac{a^{10} - b^{10}}{a - b} = \frac{(a-b)(a^9 + a^8 b + \cdots + ab^8 + b^9)}{a - b}$$

$$= a^9 + a^8 b + \cdots + ab^8 + b^9 \quad \cdots①$$

a, b は整数より A は整数。

$B = \dfrac{10^{36} - 3^9}{9997}$ も同様に考えると

$$B = \frac{a^9 - b^9}{a - b} = \frac{(a-b)(a^8 + a^7 b + \cdots + ab^7 + b^8)}{a - b}$$

$$= a^8 + a^7 b + \cdots + ab^7 + b^8$$

a, b は整数より B も整数

Q2

①より $A = a^9 + a^8 b + \cdots + ab^8 + b^9$

A の 1 の位 ⇒ mod 10 で考える

$a = 10^4$ より $a \equiv 0 \pmod{10}$

$b = 3$ より $3^9 \equiv 3^4 \times 3^4 \times 3$

$\equiv 1 \times 1 \times 3$

$\equiv 3 \pmod{10}$

よって $A \equiv b^9 \equiv 3 \pmod{10}$

∴ A の 1 の位は 3